

## गणित शिक्षण में संख्या रेखा की अवधारणा कभी चटपटी, कभी अटपटी

संदीप त्रिपाठी

गणित में विद्यार्थियों को संख्याओं का शिक्षण आमतौर पर अमूर्त प्रतीकों के रूप में करवाया जाता है। इससे विद्यार्थी प्रक्रिया तो सीख लेते हैं लेकिन उन्हें संख्याओं की समझ बनाने में कठिनाई महसूस होती है। प्रस्तुत लेख में लेखक संख्या रेखा पर अपने काम के अनुभव से बताते हैं कि यदि विद्यार्थी स्वयं मूलभूत संक्रियाओं पर काम करके सीखें तो वे न सिर्फ गणितीय अवधारणाओं को बेहतर समझ पाते हैं बल्कि समझा भी पाते हैं। गणित की कक्षा में बच्चों के स्वयं सीखने के मौके बनाने पर उनमें विषय के प्रति संकोच और डर भी कम होता है। सं.

### पृष्ठभूमि

प्रारम्भिक स्तर पर संख्या रेखा की अवधारणा गणित शिक्षण का एक बहुत महत्वपूर्ण भाग है। इसके द्वारा बच्चे संख्या क्रम और परिमाण का निरूपण करना और साथ में संख्या व उनपर होने वाली संक्रियाएँ सीखते हैं। गणित की अवधारणाओं के अमूर्त निरूपण में संख्या रेखा की समझ बहुत महत्वपूर्ण भूमिका निभाती है। यद्यपि कुछ छोटे बच्चों को इन्हें समझने में कठिनाई हो सकती है, किन्तु प्रारम्भिक स्तर पर संख्या रेखा की अवधारणा भविष्य की कठिनाइयों को रोकने, और गणित की अवधारणाओं व बच्चों के ठोस अनुभवों के साथ सम्बन्ध बनाने में मददगार होती है (गियरी, 1993)। वैसे देखा जाए तो संख्या रेखा हमारे रोजमर्रा के जीवन का एक हिस्सा भी है। हम अनेक पैमानों को पढ़ते समय, यथा— मापन के टेप, थर्मामीटर, वजन मापने की मशीन, आदि के रूप में इसका उपयोग करते हैं।

संख्या रेखा का उपयोग विभिन्न गणितीय अवधारणाओं और प्रक्रियाओं के बारे में छात्रों की

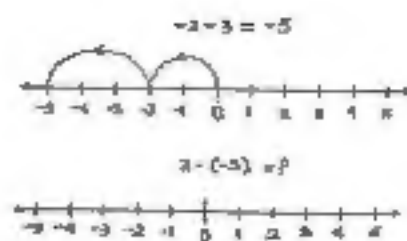
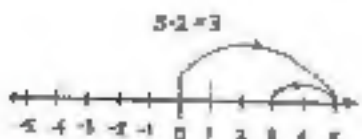
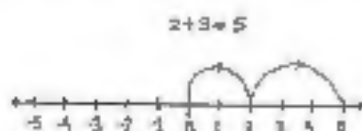
अवधारणात्मक समझ को जानने के लिए किया जाता है, जैसे कि संख्या अनुक्रमण गतिविधियाँ (विगेल, 1998), गणितीय संक्रियाओं को दिखाने की एक ठोस विधि के रूप में (डेविस और सिम्ट, 2003), परिमेय संख्याओं की निरन्तरता को कल्पना कर पाने में सहायता (डायन्स, 1964), आदि।

यद्यपि संख्या रेखा छात्रों को गणित की समझ में सहायता कर सकती है, किन्तु कई शोधों से यह संकेत भी मिलता है कि कुछ प्राथमिक छात्रों को संख्या रेखा के उपयोग में कठिनाई का अनुभव होता है (डाइज़मैन एंड लोरी, 2006)। फिर भी कह सकते हैं कि प्राथमिक स्तर पर यह गणित शिक्षण में विद्यार्थियों की समझ को बढ़ाने में मदद करने के साथ-साथ उनका गणित से लगाव भी बढ़ाती है। सामान्यतः शालाओं में विद्यार्थियों को संख्याओं का शिक्षण अमूर्त प्रतीकों के रूप में करवाया जाता है। ऐसे में विद्यार्थी गणितीय प्रक्रिया तो सीख लेते हैं लेकिन उससे सम्बन्धित समझ बनाने में उन्हें बहुत कठिनाई महसूस होती है।

अपने प्रयोग के दौरान मैंने अनुभव किया कि जब बच्चे संख्या रेखा पर स्वयं मूलभूत गणितीय संक्रियाओं का अभ्यास कर रहे थे, तो उनके पास एक ज्यादा स्पष्ट अवधारणा थी। वे ज्यादा अच्छे-से गणितीय अवधारणा को न केवल समझ पा रहे थे, बल्कि सहपाठियों के साथ व्यक्त भी कर पा रहे थे। इसके साथ यह भी अनुभव हुआ कि बच्चों के मन में गणित के सबालों के डल को लेकर जो एक डिज़न या उत्तर पर मर्रोसे की कमी एवं डर रहता है, कहीं-न-कहीं जब उन्होंने संख्या रेखा पर स्वयं प्रयोग करके देखे, तो यह काफी डब तक डूर हुआ। साथ ही डनहे इस तरह से गणित करना ज्यादा रोमांचक लगा और गणित में डनका ज्यादा अच्छा जुडाल सम्भव हो सका।

### बच्चों के साथ अनुभव

संख्या रेखा पर बच्चों की समझ को जानने के लिए मैंने लगभग 40 बच्चों के साथ कुछ प्रयोग किए। यह सभी शासकीय ज्ञानोदय विद्यालय नर्मदापुरम के कक्षा छठवीं के बच्चे थे। इनकी उम्र 11 से 13 वर्ष के बीच थी। सबसे पहले चित्र 1 अनुसार संख्या रेखा बनाई जिसमें दाहिने हाथ की तरफ धनात्मक और बाईं तरफ ऋणात्मक संख्याओं को अंकित किया। मैंने बच्चों को संख्या रेखा की आधारभूत जानकारी दी और उसपर काम कैसे किया जाता है, यह बताया।



चित्र 1

यह सब बताने के बाद मैंने पहला प्रश्न पूछा, “हम इस संख्या रेखा पर  $2+3$  कैसे करेंगे।”

एक बच्चा बोलने लगा, “सर, पहले शून्य से धनात्मक तरफ 2 कदम चलेंगे फिर 2 के बाद 3 कदम पुनः उसी दिशा में चलेंगे, इस प्रकार उत्तर 5 आएगा।”

पुनः मैंने अगला सवाल किया, “ $5-2$ , इसे कैसे करेंगे।” अधिकांश बच्चे सोचने लगे, लेकिन उनमें से कुछ बच्चों ने ध्यान से प्रश्न को देखा और कहने लगे, “सर, पहले हम धनात्मक 5 की ओर चलेंगे और क्योंकि अगली संख्या ऋणात्मक है अतः हम अब ऋणात्मक संख्याओं की ओर 2 कदम चलेंगे, इस प्रकार उत्तर 3 आएगा।”

मैंने बच्चों का हौसला बढ़ाया और उन्हें उसी प्रकार दो धनात्मक संख्याओं का जोड़, धनात्मक संख्या में से धनात्मक संख्या घटाना आदि सवाल दिए। अब बच्चे बहुत आसानी से उन सवालों को हल करने लगे।

फिर अगला सवाल, “ $[-2-3]$  कैसे करेंगे।” चूंकि बच्चे थोड़ा अभ्यास कर चुके थे तत्काल एक बच्चा आया और वह करके दिखाने लगा। 0 से ऋण तरफ पहले वह 2 कदम चला उसके पश्चात कहने लगा, “अगली संख्या भी ऋणात्मक है अतः पुनः ऋण की ओर आगे बढ़ेंगे”, और वह उसी दिशा में 3 कदम और चला। इस प्रकार उसने बताया कि उत्तर -5 आएगा।

सभी ने तालियों से उसका घन्ताहवर्धन किया। इस प्रकार हमने और भी बहुत सारे अभ्यास किए जिनमें सभी बच्चे शामिल हुए।

अब मैंने सवाल किया, "हम (3) - (-5) कैसे करेंगे?" चूंकि बच्चे अब अभ्यस्त हो चुके थे अतः उसमें एक बच्चा आया और वह पहले धनात्मक और तीन क्रम चला और वहाँ से वापस ऋणात्मक और 5 क्रम चला इस प्रकार उसने उत्तर बताया 2।

इस उत्तर को बताते समय उस बच्चे के चेहरे पर कुछ शंका के बादल मौजूद रहे थे। कक्षा में बैठे हुए बाकी बच्चे भी पूर्ण रूप से आश्वस्त नहीं थे, और वह आपस में कुछ खुसर-पुसर कर रहे थे।

मैं सब घटनाएँ देख रहा था। मैंने प्रश्न किया, "क्या हमारा उत्तर 2 सही है?" बच्चे मनोपेश में थे, क्या उत्तर दूँ, हाँ या नहीं। मैंने वापस फिर वही सवाल किया तो उसमें एक बच्ची कहने लगी, "नहीं सर, इसका उत्तर तो 8 आएगा।"

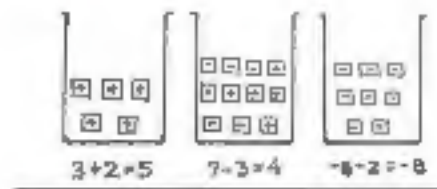
मैंने कहा, "आप संख्या रेखा पर आकर बता सकती हो।" वह भी एक उलझन में थी किन्तु कुछ सोचते हुए हुए वह आई और उसने भी वही प्रक्रिया अपनाई। पहले वह संख्या रेखा पर धनात्मक और 3 क्रम चली फिर ऋणात्मक चिह्न देखकर उसने अपना मुँह ऋणात्मक संख्याओं की ओर किया।

लेकिन यहाँ उसके सामने एक और ऋण संख्या आ गई। वह सोचने लगी क्या करना है। सभी बच्चे बड़े ध्यान से उसकी तरफ देख रहे थे। मैं फिर पुछने लगा, "अब क्या करेंगे?" लेकिन बच्चे वहाँ अटक गए क्योंकि यहाँ दो बार ऋण चिह्न का उपयोग हो रहा था।

प्रक्रिया के रूप में था जो उन्होंने पूर्व में पढ़ा हुआ था, घन्ते के अनुसार जो घन्ता उत्तर 8 आ रहा था, लेकिन जो अभी हमने संख्या रेखा के बारे में पढ़ा उसके अनुसार उनका उत्तर 2 आ रहा था।

यह प्रश्न मैंने बच्चों के ऊपर छोड़ दिया कि आप लोग सोचकर आइए कि इसका सही उत्तर क्या हो सकता है। हमारी यह मंखला चलती रही।

मैं देख रहा था कि संख्या रेखा गतिविधि में सहभागिता तो लगभग सभी बच्चों की थी लेकिन शायद वे अभी भी अवधारणा को नहीं समझ पा रहे थे। कुछ बच्चे अभी भी अपने साथियों की मकल करते हुए उत्तर देने का प्रयास कर रहे थे। इस समस्या को देखते हुए मैंने एक नया प्रयोग करना प्रारम्भ किया।



चित्र 2

मैंने एक गत्ते के बहुत सारे छोटे-छोटे सर्गाकार टुकड़े कर लिए और चित्र अनुसार उनपर धन और ऋण के चिह्न लगा दिए।

फिर वही क्रिया मैंने प्रारम्भ की और पूछा, "यदि हमें  $3 + 2$  जोड़ना है तो उत्तर क्या होगा?" बच्चों ने तत्काल 3 धन चिह्न वाले और 2 धन चिह्न वाले टुकड़े उठा लिए और बताया, "सर, उत्तर 5 आएगा।"

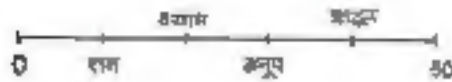
फिर अगला प्रश्न "7 में से ऋण 3 करने पर उत्तर क्या आएगा।" सबसे पहले उन्होंने 7 धन चिह्न वाले टुकड़े लिए और फिर 3 ऋण चिह्न वाले टुकड़े लिए। ऋण और धन चिह्न वाले टुकड़ों की जोड़ी बनाने के बाद शेष चार धन चिह्न वाले टुकड़े बचे। उन्होंने बताया, "सर, उत्तर 4 आएगा।"

इस प्रकार, अन्य संख्याओं पर भी हमने प्रयोग किए और मुझे लगा कि संख्या रेखा की अवधारणा को स्पष्ट करने में यह प्रयोग क्यादा प्रभावी सिद्ध हो रहा है। इन दोनों गतिविधियों के माध्यम से बच्चे अवधारणात्मक स्तर पर



ज्यादा आसानी से गणितीय संक्रियाएँ सीखें, और निश्चित रूप से यह प्रयोग पहले वाले की तुलना में बच्चों के लिए ज्यादा आसान और असरदार रहे। दूसरे प्रयोग के पश्चात् संख्या रेखा के बारे में उनकी समझ पहले प्रयोग की अपेक्षा ज्यादा अच्छी हुई।

चित्र 3 अनुसार मैंने पुनः एक चित्र बनाया और यहाँ पर बच्चों से प्रश्न किया, “बताओ, बादल की निकटतम संख्या क्या होगी?”



चित्र 3

बच्चों ने चित्र को ध्यान से देखा और कहने लगे, “सर, 50 होगी।”

मैंने फिर कतर्क किया, “क्या सभी सहमत हो?” अधिकतर बच्चे सहमति से जोर-जोर से बोलने लगे, “हाँ सर, 50 होगी।”

अब मैंने पूछा, “राम की निकटतम संख्या क्या हो सकती है?” वे कहने लगे, “सर, 0 होगी।” मैंने कहा, “यह शून्य के नज़दीक तो है लेकिन शून्य तो नहीं है, वह संख्या क्या हो सकती है?” बच्चे अनुमान लगाने लगे और उनमें से कुछ ने कहा, “सर, यह 10 के आसपास हो सकती है।”

गतिविधि को आगे बढ़ाते हुए मैंने अगला प्रश्न किया, “अब बताओ, श्याम के पास की संख्या क्या हो सकती है?” बच्चे कहने लगे, “सर, यह 10 से ज्यादा होगी और 20 के आसपास हो सकती है।” कम की आगे बढ़ाते हुए फिर मैंने अगला सवाल दामा, “अनूप के नज़दीक की संख्या क्या होगी?” बच्चे सोच में पड़ गए क्योंकि अनूप, श्याम के तो पास था लेकिन बादल से भी ज्यादा दूर नहीं था। वे आपस में चर्चा करते रहे, कभी 30 बोलते कभी 35। अन्तिम रूप से उन्होंने निष्कर्ष निकाला, “सर, यह 30 होनी चाहिए, क्योंकि अनूप, श्याम एवं बादल के लगभग बीच में था।”

अगला प्रश्न किया, “बताइए, बादल की स्थिति अनूप और 50 के बीच में है तो हमारा सम्भावित उत्तर क्या हो सकता है?” बच्चे अनुमान लगाते रहे और फिर उन्होंने जवाब दिया, “यह 40 के लगभग हो सकती है।”

क्योंकि अब बच्चों को बहुत मजा आ रहा था और वह पूरी तरीके से इसमें रम चुके थे। मैंने उन्हें एक अगला चित्र दिखाया जिसके बारे में कोई जानकारी नहीं दी।



चित्र 4

तबसे पर उससे सम्बन्धित एक प्रश्न लिख दिया और बच्चों से कहा, “अब बताइए, बैतुल से दिल्ली के बीच की दूरी क्या होगी?”

एक बच्चे ने तत्काल उत्तर दिया, “सर, 400 किलोमीटर होगी।” कुछ बच्चे फिर से सोचने लगे और कुछ बच्चे दबे स्वर में और कुछ बोलना चाह रहे थे। मैंने उनसे कहा, “फिर से सोचो और बताओ।” बच्चों ने फिर सोचा, कुछ जोड़ किया, और बताया, “सर, बैतुल से दिल्ली के बीच की दूरी 580 किलोमीटर होगी।”

उस बच्चे ने जिसने उत्तर 400 किलोमीटर बताया था, मैंने पूछा, “उत्तर क्या होना चाहिए।” वह बोलने लगा, “580 किलोमीटर होगा।” मैंने पूछा, “फिर आपने क्यों बोला कि 400 किलोमीटर होगा?” वह कहने लगा, “सर, मैंने ध्यान नहीं दिया और जल्दबाजी में बोल दिया।”

मेरा अगला सवाल था, “बैतुल से दिल्ली के बीच की दूरी के लिए हमें क्या करना चाहिए या क्या करना होता है?” उसने बताया, “सर, पहले बैतुल से हटारसी के बीच की दूरी, हटारसी से गोपाल की और फिर भोपाल से दिल्ली के बीच की दूरियाँ इन सभी को जब हम आपस में जोड़

देंगे तब जाकर बैतुल से दिल्ली के बीच की दूरी निकल आएगी।”

इस प्रकार कभी-कभी जब बच्चे ध्यान नहीं दे पाते हैं या बोड़ी जल्दबाजी करते हैं उस स्थिति में भी संख्या रेखा समझने में थोड़ी कठिनाई महसूस होती है।

सत्र के पश्चात कुछ चीजों से सम्बन्धित कुछ बातें मेरे मन में आईं उनका विवरण मैं नीचे दे रहा हूँ। पूरी प्रक्रिया के दौरान हमें दो समूहों में बच्चे देखने को मिले। पहला समूह उन बच्चों का था जिन्होंने पहली बार में ही एकदम सही उत्तर दे दिए थे। साथ में इसी समूह में कुछ ऐसे बच्चे भी शामिल थे जिन्होंने शोका प्रयास किया और सही उत्तर बता दिया। और दूसरा समूह ऐसे बच्चों का था जिन्होंने या तो बहुत बाद में उत्तर दिया या वे समझ ही नहीं पाए और दोस्तों की नक़ल कर ही उत्तर बताते रहे।

### सफल विद्यार्थियों ने संख्या रेखा का प्रयोग किस प्रकार किया

सफल छात्रों ने संख्या रेखा पर मापन पहलू, विशेष रूप से दूरी संख्याओं की निकटता या सन्दर्भ बिन्दुओं से सम्बन्धित रणनीतियों का उपयोग किया। उदाहरण के लिए, चित्र 3 के जवाब में, सफल छात्रों ने अपने उत्तरों की व्याख्या करते समय, संख्या रेखा के मापन पहलू पर प्रकाश डाला।

उन्होंने 0 और 50 के बीच की दूरी को देखा और तर्क दिया कि क्योंकि बादल की जगह अनूप और 50 के बीच में है इसलिए बादल का मान 40 के आसपास होना चाहिए। इसी प्रकार राम, श्याम एवं अनूप आदि के लिए भी वे तर्क आधारित अनुमान लगाते रहे।

छात्रों ने जो तरीका अपनाया उसमें उन्होंने दूरी पर भी विचार किया। उदाहरण के लिए, कुछ छात्रों ने समाधान के रूप में बादल की पहचान करने से पहले अन्य व्यक्तियों की

स्थिति का अनुमान लगाया। सफल छात्र समझते हैं कि संख्या रेखा एक मापन मॉडल है और इसकी व्याख्या करने के लिए अंकों के बीच की दूरी पर ध्यान देने की आवश्यकता है।

### असफल विद्यार्थियों ने संख्या रेखा का प्रयोग किस प्रकार किया

हमारी गतिविधि में लिए गए 40 छात्रों में से कम-से-कम 15% छात्र संख्या रेखा गतिविधि पर अपेक्षित रूप से सफल नहीं हो पाए। इन छात्रों ने सवाल को हल करने, या उस हल की व्याख्या के दौरान (स्पष्टीकरण त्रुटियों) गलतियाँ कीं। इनमें समाधान की त्रुटियाँ आम थीं। उनमें दूरी स्थिति, गिनती या आरेख को गलत तरीके से पढ़ने में कठिनाइयाँ शामिल थीं। उदाहरण के लिए, चित्र 3 में दिखाए गए आइटम के लिए, असफल छात्रों की एक सामान्य प्रतिक्रिया अज्ञात मूल्य की पहचान करने के लिए केवल गिनती को नियोजित करना थी। उदाहरण के लिए, छात्र ने गिने जाने वाले अंकों के बीच की दूरी के महत्त्व के बारे में कोई जागरूकता नहीं दिखाई।

### मैंने क्या सीखा

अपने उत्तर का स्पष्टीकरण छात्रों और उनकी सोच को परिष्कृत करने में मदद कर सकता है। इसके द्वारा वे अवधारणात्मक रूप से ज्यादा स्पष्टता हासिल कर सकते हैं। इन गतिविधियों के दौरान कई छात्रों को लगा कि उन्होंने प्रश्न को जोर से पढ़ने के बाद सही उत्तर दिया था या वह जोर से पढ़ने के बाद ही प्रश्न की भाषा को समझ पाए थे। जोर से पढ़ने से छात्रों को प्रश्न की सारी जानकारी को समझने में मदद मिली।

उदाहरण के लिए, चित्र 4 में छात्रों को संख्या रेखा पर स्थिति की पहचान करने और फिर गणना करने की आवश्यकता है। कई छात्रों ने अपने उत्तर के रूप में 400 किलोमीटर का घयन करते हुए इस प्रश्न को गलत तरीके से

पढ़ा। जब उनसे प्रश्न को जोर से पढ़ने और अपने उत्तर की व्याख्या करने के लिए कहा गया, तो उन्हें अपनी त्रुटि का एहसास हुआ और उन्होंने अपने उत्तर को 580 किलोमीटर के सही विकल्प में बदल दिया।

स्पष्टीकरण छात्रों की स्वयं को सही करने की क्षमता में वृद्धि करने के साथ ही स्वयं के प्रदर्शन में सुधार के लिए एक महत्वपूर्ण अवसर प्रदान करता है। सफल छात्रों ने मापन मॉडल के रूप में संख्या रेखा पर ध्यान केन्द्रित किया और दूरी, संख्याओं की निकटता, या सन्दर्भ बिन्दुओं से सम्बन्धित रणनीतियों को वियोजित किया। इसके विपरीत, असफल छात्रों ने ऐसी रणनीतियों का उपयोग किया जो गिनती, प्रश्न को गलत तरीके से पढ़ने या अनुमान लगाने

पर केन्द्रित थीं। स्पष्ट है कि कई छात्रों को संख्या रेखाओं के ज्ञान को विकसित करने के लिए सहायता की आवश्यकता होती है। इस सबके निहितार्थ क्या हैं? हम इस समझ के आधार पर कक्षा शिक्षण के दौरान क्या रणनीति अपना सकते हैं? छात्रों को उनकी त्रुटि को समझाने के लिए कब और कैसे मौके दिए जा सकते हैं। व्याख्या करने से छात्रों को समीक्षा करने और, यदि आवश्यक हो, उनकी गणितीय त्रुटि को परिशुद्ध करने का अवसर मिलता है। स्पष्टीकरण के दौरान, कुछ छात्र अचानक एक ऐसे क्षण का अनुभव करते हैं जहाँ उन्हें महसूस होता है कि उन्होंने कहीं गलती की और वे उस गलती को आसानी से ठीक कर सकते हैं।

## सन्दर्भ

1. Diermann, C. M. & Lowrie, T. (2006). Primary students' knowledge of and errors on number lines. In P. Grootenboer, R. Zeyherbergen, & M. Chinnappan (Eds), *Identities, cultures, and learning spaces* (Proceedings of the 29th annual conference of the Mathematics Education Research Group of Australasia), (Vol. 1, pp. 171–178). Adelaide: MERGA.
2. Witze, B., Mercer, C. D., & Miller, M. D. (2003). Teaching algebra to students with learning difficulties: An investigation of an explicit instruction model. *Learning Disabilities Research and Practice*, 18, 121–131.
3. Geary, D. C. (1993). Mathematical disabilities: Cognitive, neuropsychological, and genetic components. *Psychological Bulletin*, 114, 345–362.
4. Geary, D. C., Hoard, M. K., Nugent, L., & Byrd-Craven, J. (2008). Development of number line representations in children with mathematical learning disability. *Developmental Neuropsychology*, 33, 277–299.

संदीप शिवाजी 1998 से माध्यम स्तर के गणितीय क्षेत्रों में अध्यापन का कार्य कर रहे हैं। इन्होंने विभिन्न विषय में स्नातकोत्तर के साथ ही पीएचडी है। विभिन्न स्तरों के छात्रों को प्रेरित करने एवं समझाने में भी स्नातकोत्तर विद्वान हैं। इनके विषय, संदर्भ, स्रोत, प्रमाण, तर्क, शक्ति से जुड़ी प्रतिक्रियाओं में लेख प्रकाशित हुए हैं। इनके द्वारा गणित और भूगोल विषय में वैश्विक अनुमानों के कार्य भी किए जाते हैं। शास्त्र विचारधारा में कार्यरत स्वतंत्रता संग्राम काल के कुछ विचार प्रारम्भिक शिक्षा में सुधार हेतु अपने समस्त लेख प्रकाशित किए हैं। इनके पास पुस्तकें, सफलता की राह, छोटे अनुभव बड़ी जीत, मैं और मेरी दुनिया और डिजिटल सर्वेक्षण जैसे नाम से प्रकाशित हुई हैं।

संपर्क : sandip26aripati@gmail.com